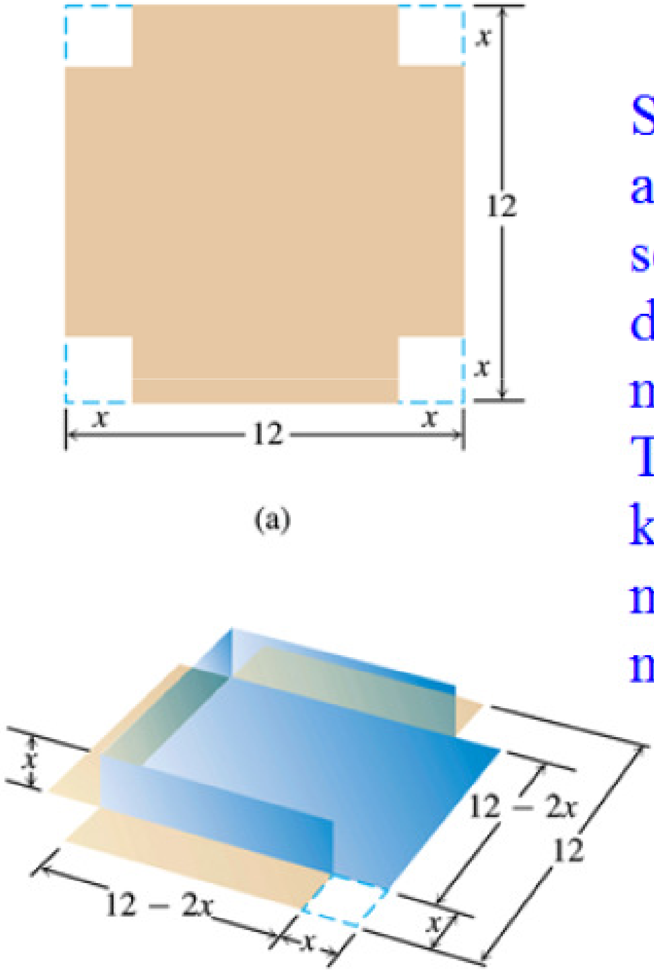
MATEMATIKA EKONOMI

PENGOPTIMUMAN FUNGSI VARIABEL TUNGGAL

TONI BAKHTIAR
INSTITUT PERTANIAN BOGOR

2012

Volume Maksimum



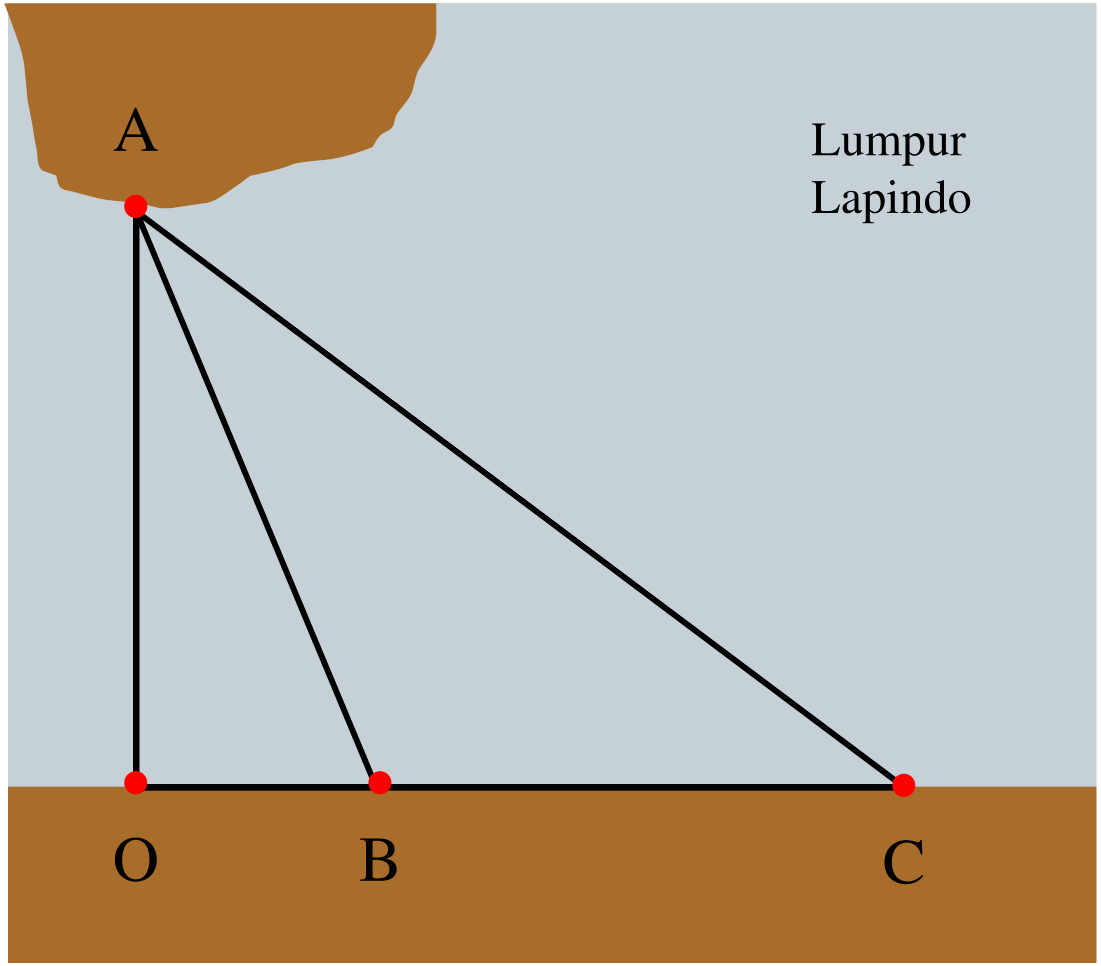
(a)

Sebuah kotak terbuka akan dibuat dari selembar karton dengan panjang sisi masing-masing 12 cm. Tentukan ukuran kotak agar menghasilkan volume maksimum.

Luas Minimum

Perusahaan minuman soda "Roso-Roso" akan merancang kaleng dengan volume 1/2 lt. Tentukan ukuran kaleng agar menghabiskan bahan sesedikit mungkin.

Biaya Minimum

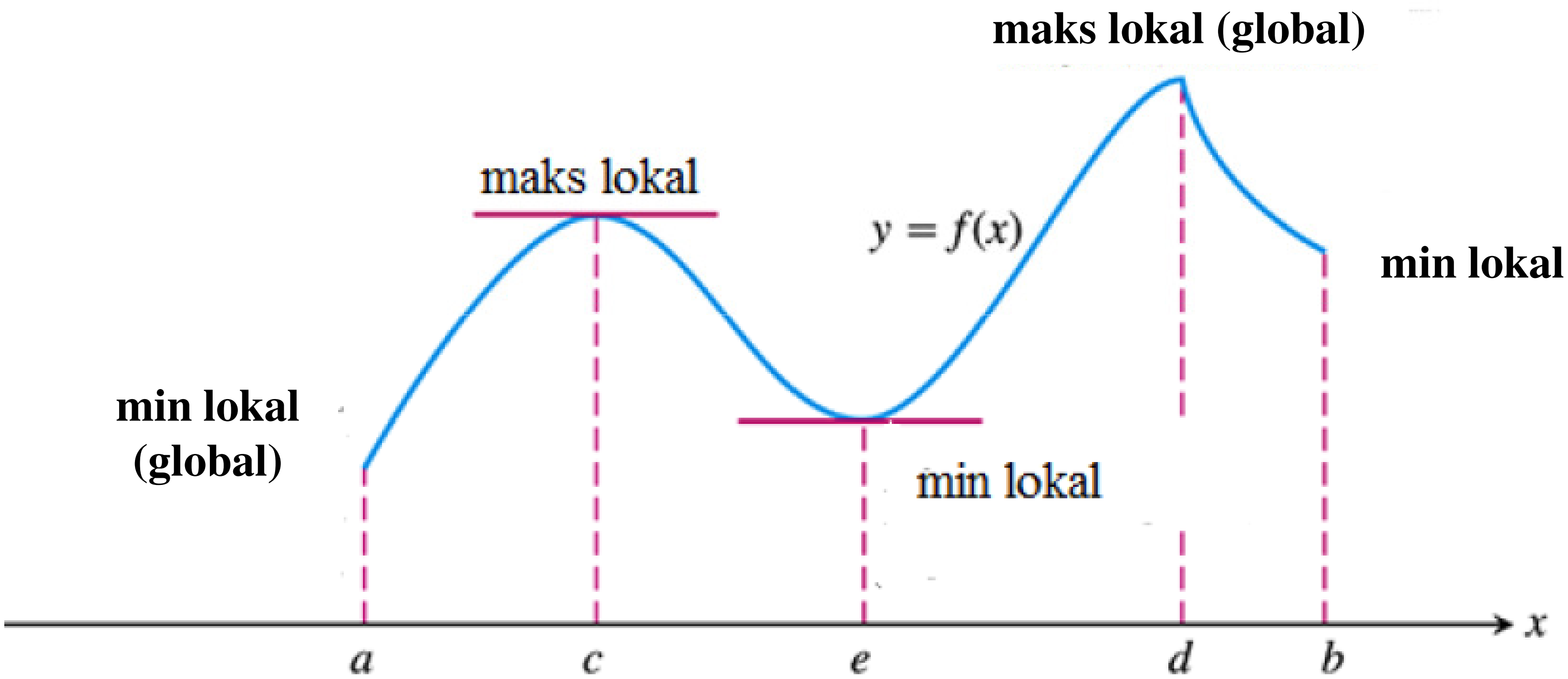


Biaya pembangunan jalan/jembatan tol yang menghubungkan A dan C:

- 1 M/km di atas lumpur
- 0.5 M/km di lahan kering

Tentukan lokasi B agar biaya minimum.

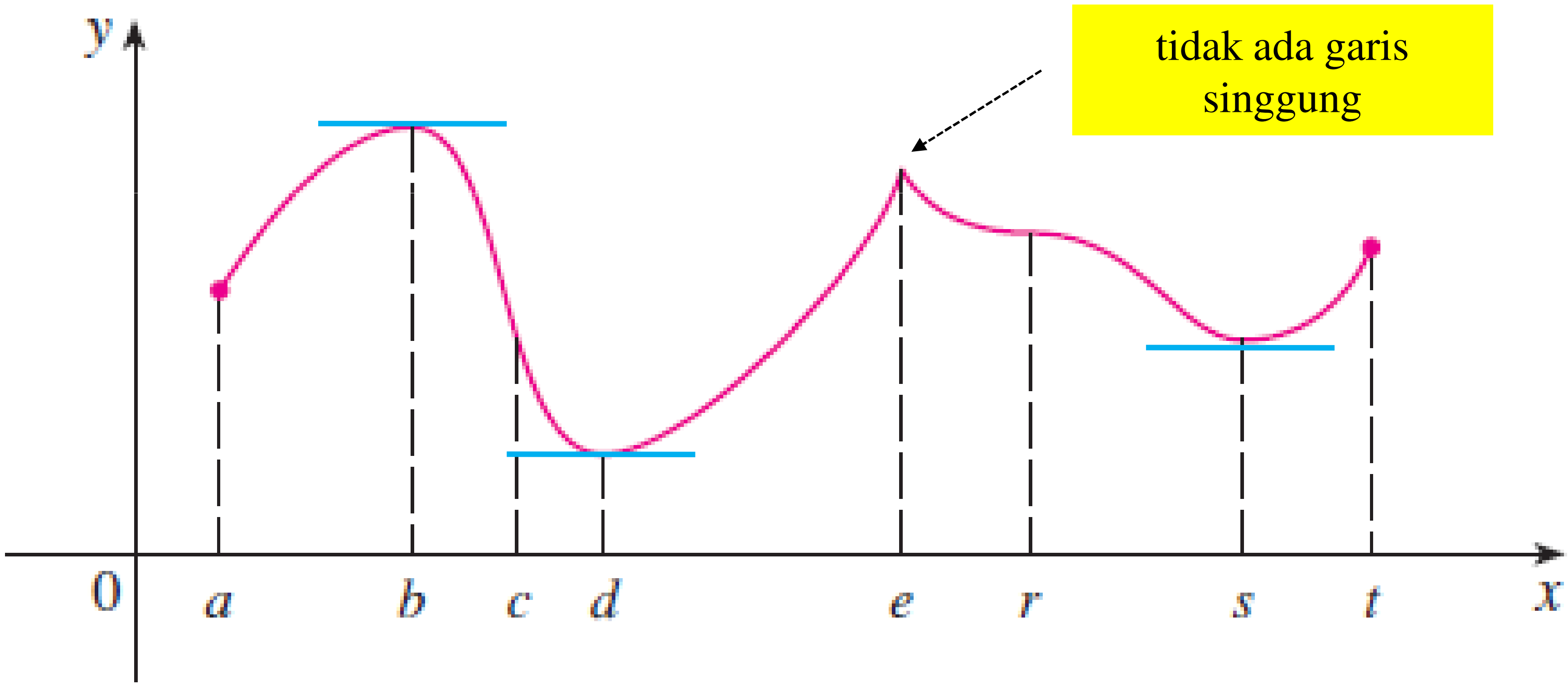
Nilai Minimum dan Maksimum



lokal = relatif

global = mutlak

Nilai Minimum dan Maksimum



Bilangan Kritis

Definisi (Bilangan Kritis)

Bilangan c di dalam daerah fungsi f dengan $f'(c) = 0$ ataukah $f'(c)$ tidak ada disebut bilangan kritis.

- Bilangan c yang memenuhi $f'(c) = 0$ disebut **nilai stasioner**.
- Bilangan c yang membuat $f'(c)$ tidak ada disebut **nilai singular**.
- Contoh: $f(x) = 3x^2 - 18x + 34.$

  Bilangan kritis (berupa nilai stasioner):

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 6x - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3. \end{aligned}$$

Bilangan Kritis

Teorema (Teorema Fermat)

Jika $f(c)$ merupakan ekstrim lokal, maka c adalah bilangan kritis.

- Teorema Fermat menyatakan bahwa *syarat perlu* agar $f(c)$ merupakan ekstrim lokal adalah c merupakan bilangan kritis dari fungsi f.
- Untuk memperoleh ekstrim lokal $f(c)$, terlebih dahulu ditentukan bilangan kritis c karena jika c bukan bilangan kritis, maka $f(c)$ bukan ekstrim lokal.
- Perhatikan bahwa jika c bilangan kritis, belum tentu $f(c)$ merupakan ekstrim lokal.

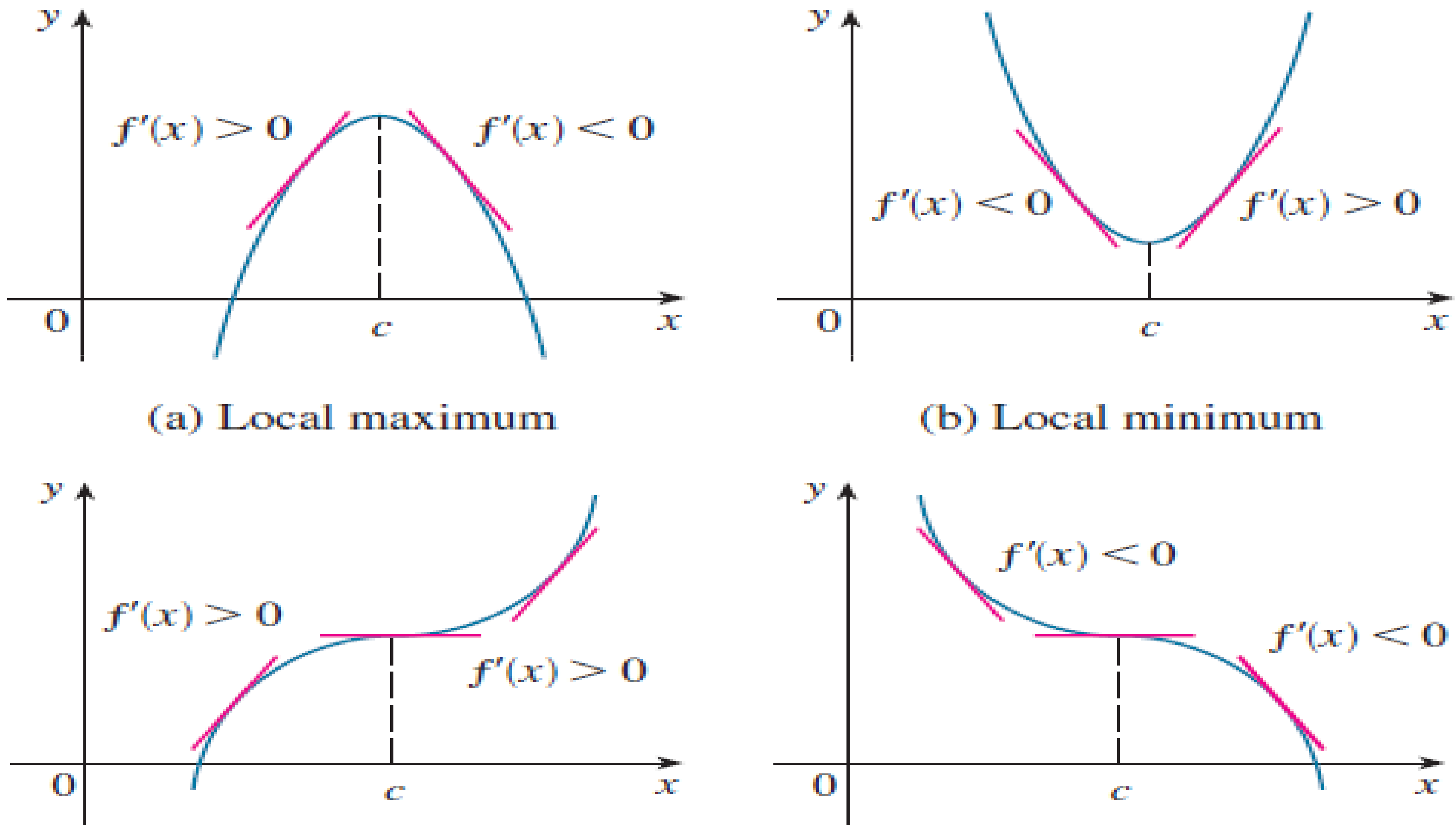
Uji Turunan I untuk Ekstrem Lokal

Teorema (Uji Turunan I bagi Ekstrim Lokal)

Misalkan c adalah bilangan kritis fungsi kontinu f, dan f terturunkan pada setiap titik pada selang yang memuat c, kecuali mungkin di c. Bergerak melewati c dari kiri ke kanan:

1. *Jika f' berubah tanda dari negatif ke positif, maka $f(c)$ merupakan minimum lokal.*
2. *Jika f' berubah tanda dari positif ke negatif, maka $f(c)$ merupakan maksimum lokal.*
3. *Jika f' tidak berubah tanda, maka $f(c)$ bukan ekstrim lokal.*

Uji Turunan I untuk Ekstrem Lokal



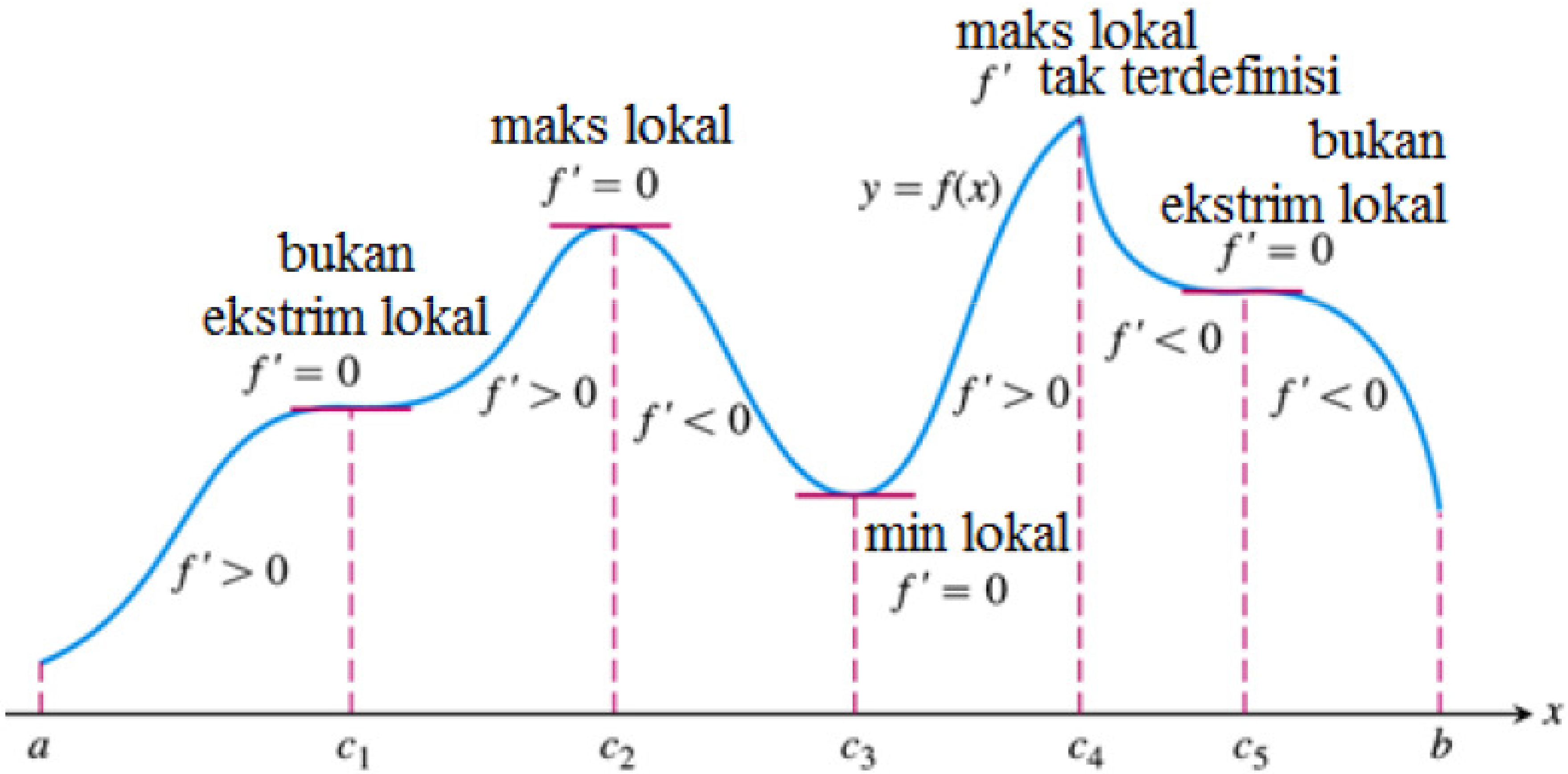
(a) Local maximum

(b) Local minimum

(c) No maximum or minimum

(d) No maximum or minimum

Uji Turunan I untuk Ekstrem Lokal

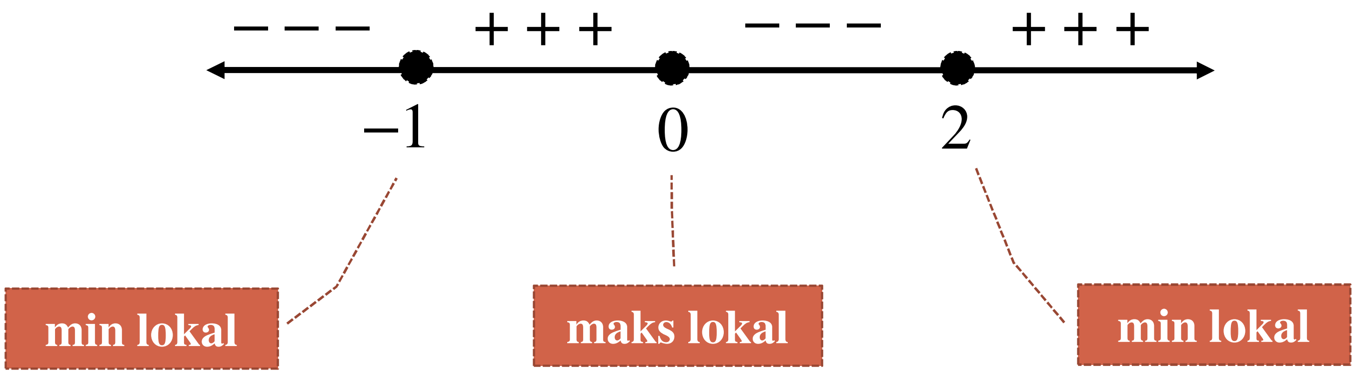


Uji Turunan I untuk Ekstrem Lokal

- Contoh: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

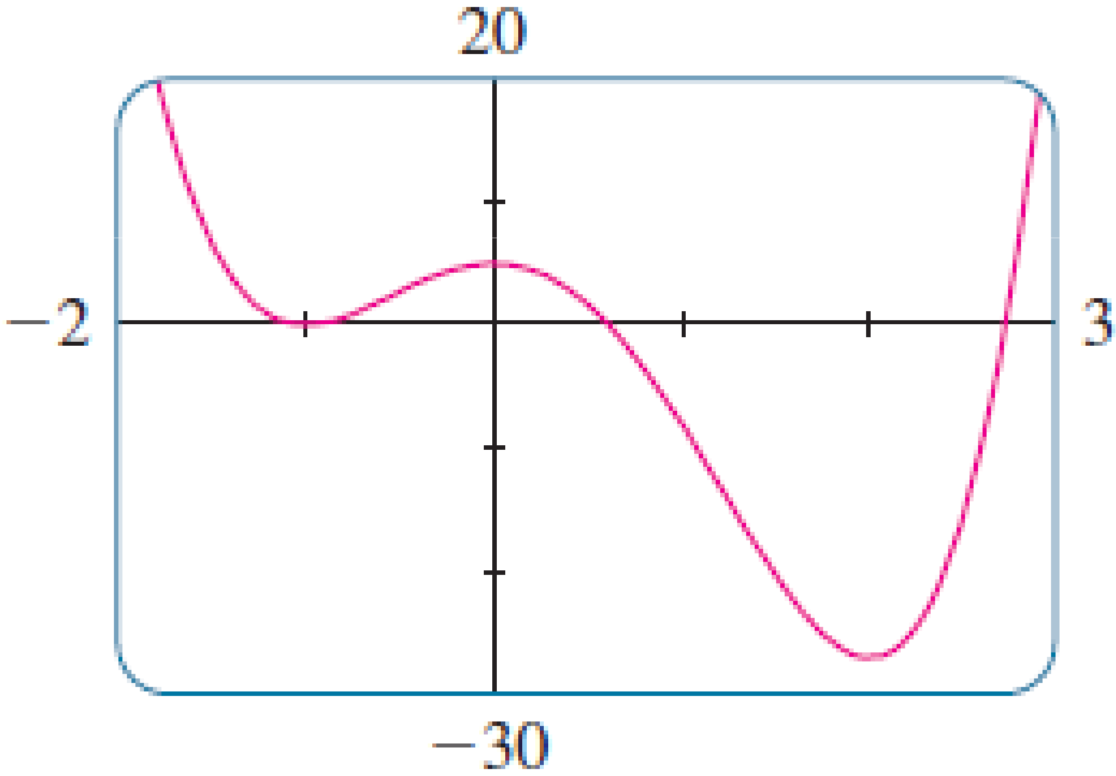
  $$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

- Tanda $f'(x)$



Uji Turunan I untuk Ekstrem Lokal

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$



Uji Turunan II untuk Ekstrem Lokal

Teorema (Uji Turunan II bagi Ekstrim Lokal)

Andaikan fungsi f'' kontinu pada selang terbuka yang memuat c.

1. *Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan minimum lokal.*
2. *Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan maksimum lokal.*
3. *Jika $f'(c) = 0$ dan $f''(c) = 0$, uji turunan II gagal. Fungsi f mungkin memiliki ekstim lokal, mungkin tidak.*

Uji Turunan II untuk Ekstrem Lokal

$f' = 0, f'' < 0$
$\Rightarrow$ maks lokal

$f' = 0, f'' > 0$
$\Rightarrow$ min lokal

Uji Turunan II untuk Ekstrem Lokal

- Contoh:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2)$$

Bilangan kritis: $x = 0, x = 2, x = -1$

Tanda f'':

$f''(0) = -24 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ maks lokal

$f''(2) = 72 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ min lokal

$f''(-1) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ min lokal

Pengoptimuman dalam Selang

Metode Selang Tertutup

Misalkan f terdefinisi pada selang tertutup $[a, b]$. Nilai maksimum/minimum mutlak fungsi f dapat ditentukan dengan cara:

- Tetapkan bilangan-bilangan kritis pada (a, b).
- Evaluasi f pada bilangan-bilangank kritis dan titik-titik ujung $(x = a, x = b)$. Nilai terbesar merupakan maksimum lokal, nilai terkecil merupakan minimum mutlak fungsi f.

Pengoptimuman dalam Selang

18

- Contoh: Tentukan nilai minimum dan maksimum global fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 5$ pada [–1,4].

Step 1

$$f(x) = x^3 - 12x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$0 = 3x^2 - 12$$

$$12 = 3x^2$$

$$4 = x^2$$

$$x = 2 \qquad x = -2$$

Step 2

x	$f(x)$
-1	16
2	-11
4	21

Step 3

Nilai min global

Nilai maks global

Maksimisasi Keuntungan

- Fungsi biaya total: TC
- Fungsi penerimaan: TR
- Fungsi keuntungan: $\pi = TR - TC$
- Keuntungan mencapai maksimum:

$$\pi' = 0 \Leftrightarrow TR' - TC' = 0 \Leftrightarrow MR = MC$$

Maksimisasi Keuntungan

Seorang monopolis memiliki fungsi penawaran $P = 50 - 2Q$ dan fungsi biaya total TC = $20 + 2Q + 0.5Q^2$. Tentukan harga dan kuantitas yang memaksimumkan keuntungan.

Fungsi Total

$$\mathrm{TR} = (50 - 2Q)Q = 50Q - 2Q^2$$

$$\mathrm{TC} = 20 + 2Q + 0.5Q^2$$

Fungsi Marjinal

$$\mathrm{MR} = 50 - 4Q$$

$$\mathrm{MC} = 2 + Q$$

Maksimisasi keuntungan:

$$MR = MC \Leftrightarrow 50 - 4Q = 2 + Q$$

Diperoleh: $Q^* = 9.6$, $P^* = 30.8$

Uji Turunan II:

$$\pi'' = \mathrm{MR}' - \mathrm{MC}' = -4 - 1 = -5 < 0$$

(P^*, Q^*) memaks. keuntungan

Pajak dan Maksimisasi Keuntungan

Sebuah perusahaan monopolis memunyai fungsi biaya total TC = $20 + 0.5Q^2$ dan fungsi permintaan $P = 450 - 2Q$. Diskusikan pengaruh kebijakan pengenaan pajak terhadap harga-kuantitas yang memaksimumkan keuntungan:

- per-unit sales tax t,
- lump sum tax T,
- percentage profits tax c, dengan $0 < c < 1$

Penerimaan Pajak

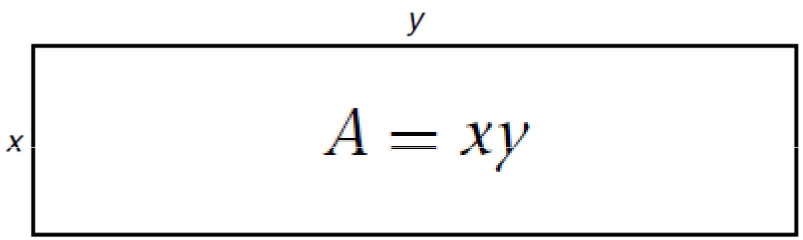
Pemerintah bermaksud mengenakan pajak penjualan sebesar t rupiah/unit terhadap suatu komoditas agribisnis yang memiliki permintaan dan penawaran

$$\begin{aligned} Q^D &= 50 - 2P_B \\ Q^S &= -10 + P_J, \end{aligned}$$

dengan P_B menyatakan harga yang dibayar oleh konsumen (termasuk pajak) dan P_J menyatakan harga bersih yang diterima produsen (setelah pajak dibayarkan ke pemerintah). Dengan asumsi bahwa seluruh pajak dibebankan kepada pembeli, tentukan besarnya pajak t yang memaksimumkan penerimaan pajak (*total tax revenue*). **Petunjuk:** tentukan hubungan antara P_B, P_J, dan t.

Luas Maksimum

Seorang petani ingin menggunakan kawat sepanjang 100 m untuk memagari kebun yang berbentuk persegi panjang. Tentukan luas maksimum kebun yang dapat dipagari.



$$2x + 2y = 100$$

$$x + y = 50$$

$$y = 50 - x$$

$$A(x) = x(50 - x)$$

$$= 50x - x^2 \qquad 0 \leq x \leq 50$$

$$A'(x) = 50 - 2x = 0$$

$$x = 25$$

x	$A(x)$
0	0
25	625
50	0

Pembatasan Harga

Sebuah perusahaan memiliki fungsi permintaan $Q = a - bP$, dengan $a,b > 0$, dan fungsi biaya total linear TC = cQ, dengan $c > 0$. Otoritas perdagangan menetapkan batasan harga $P < U_P$, dengan $U_P > c$.

- Jelas bahwa $0 \le P \le U_P$.
- $\mathrm{TC} = cQ = ac - bcP$, $\mathrm{TR} = aP - bP^2$
- $\pi(P) = aP - bP^2 - (ac - bcP) = (a + bc)P - bP^2 - ac$
- $\pi' = 0 \Leftrightarrow a + bc - 2bP = 0$
- Harga stasioner:

$$P^* = \frac{a+bc}{2b}.$$

Pembatasan Harga

- Diperoleh:

$$\pi(0) = -ac < 0,$$

$$\pi(U_P) = (a + bc)U_P - bU_P^2 - ac,$$

$$\pi(P^*) = \frac{(a - bc)^2}{4b} > 0.$$

- Mana yang paling besar?

$$\pi(P^*) - \pi(U_P) = \frac{(a - 2bU_P + bc)^2}{4b} > 0$$

- Jadi, asalkan $0 < P^* < U_P$, maka P^* memaksimumkan keuntungan.